Kocher-Maass Dirichlet series corresponding to Jacobi forms(Researches on automorphic forms and zeta functions)

数理解析研究所講究録
1002 巻 1997 年 140-150

Köcher-Maass Dirichlet series corresponding to Jacobi forms

立教大学理学部　荒川恒男

Siegel 保型形式の場合をまねて、Jacobi 形式に付随した Dirichlet 級数を構成し、その解析接続、関数等式等を与えるのが前半の主題です。後半は index 1 の Jacobi 形式の空間と同型になる、半整数保型形式の空間である Kohnen plus space の性質を調べ、その空間の Eisenstein 級数について Siegel 公式を記述する。また Kohnen plus space に属する半整数保型形式について Köcher-Maass Dirichlet 級数を構成し、前半部の結果の応用として、解析接続、関数等式を与える。

1 Siegel 保型形式の場合

$\Gamma_n = Sp_n(\mathbf{Z})$ を次数 n の Siegel modular 群とし、$\mathcal{H}_n$ を n 次の Siegel 上半平面とする。$M_k(\Gamma_n)$ で重さ k の Γ_n に関する次数 n の Siegel 保型形式の成す空間を表す。$S_n^*(\mathbf{Z})$ を n 次半整数対称行列の集合とする。$f \in M_k(\Gamma_n)$ の Fourier 展開を

$$f(Z) = \sum_{T \in S_n^*(\mathbf{Z}),\, T \geq 0} a(T) e(\mathrm{tr}(TZ)) \qquad (Z \in \mathcal{H}_n)$$

とすると、f に付随して得られる Köcher-Maass Dirichlet 級数は

$$D_n(f, s) := \sum_{T \in S_n^*(\mathbf{Z})^+/\sim} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)(\det T)^s}$$

で与えられる（[Ko], [Ma]）。これは $\mathrm{Re}(s) > k + (n+1)/2$ で絶対収束し、この領域で s の正則関数である。但し、Notation は次の通りである。$S_n^*(\mathbf{Z})^+$ は正定値半整数対称行列からなる $S_n^*(\mathbf{Z})$ の部分集合。$T,\ T' \in S_n^*(\mathbf{Z})^+$ が $GL_n(\mathbf{Z})$-同値であるのは、ある $U \in GL_n(\mathbf{Z})$ について $T' = {}^tUTU$ となるときをいう。$\varepsilon(T)$ は T の単数群の位数とする：

$$\varepsilon(T) = \sharp\{U \in GL_n(\mathbf{Z}) \mid {}^tUTU = T\}$$

上記和において T は $S_n^*(\mathbf{Z})^+$ の $GL_n(\mathbf{Z})$-同値類全体をわたる。
$D_n(f,s)$ に適当な gamma 因子をかける：

$$\xi_n(f,s) = \gamma_n(s)D_n(f,s)$$

ここで

$$\gamma_n(s) = 2\pi^{n(n-1)/4}(2\pi)^{-ns}\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(s-\frac{j-1}{2}\right)$$

とした。このゼータ関数の解析接続と関数等式を最初に証明したのは H. Maass [Ma] である。方法は不変微分作用素を用いるもので、極の留数に関する情報は失われる。

Theorem 1 (Maass) ゼータ関数 $D_n(f,s)$ は s の関数として全平面に解析接続され、関数等式

$$\xi_n(f,k-s) = (-1)^{nk/2}\xi_n(f,s)$$

を満たす。

[Ar1, 2] で $D_n(f,s)$ の極の留数を explicit に表示する $\xi_n(f,s)$ の公式が証明されている。[Ar1] は full modular 群の場合で、証明には Klingen Eisenstein 級数が使われている。[Ar2] では合同部分群の Siegel 保型形式の場合が扱われている。

伊吹山-斉藤両氏 [I-S] は、GL_n が n 次対称行列のなすベクトル空間に作用して得られる概均質ベクトル空間のゼータ関数（の一つである）

$$\sum_{T\in S_n^*(\mathbf{Z})^+/\sim}\frac{1}{\varepsilon(T)(\det T)^s}$$

を Riemann zeta 関数などを用いて explicit に表示した。用いられた方法は 2 次形式の精密な整数論である。
伊吹山-桂田両氏 [I-K] は [I-S] の方法を活用して f が $M_k(\Gamma_n)$ の unique Eisenstein 級数の場合に $D_n(f,s)$ の explicit な表示を得た。

2 Köcher-Maass Dirichlet series attahed to Jacobi forms

最初に Jacobi 形式の空間を導入しよう。以下、k は正の偶数、l は正整数とする。l 次正定値半整数対称行列 S を固定する。$\mathcal{D}_{n,l}$ を $\mathcal{H}_n$ と $M_{l,n}(\mathbf{C})$ との積空間とする：

$$\mathcal{D}_{n,l} := \mathcal{H}_n \times M_{l,n}(\mathbf{C})$$

Γ_n は $\mathcal{D}_{n,l}$ に作用する： $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $(\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l}$ に対し、

$$M(\tau, z) = (M\langle\tau\rangle, z(c\tau+d)^{-1}), \qquad M\langle\tau\rangle = (a\tau+b)(c\tau+d)^{-1}$$

以下、Jacobi 形式の記述に好都合な $Sym^*_{n+l}(\mathbf{Z})$ の部分集合を導入する。

$$\text{(2.1)} \qquad Sym^*_{n+l}(S;\mathbf{Z}) := \left\{ T = \begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & S \end{pmatrix} \,\middle|\, N \in Sym^*_n(\mathbf{Z}),\ \ r \in M_{l,n}(\mathbf{Z}) \right\}.$$

この $Sym^*_{n+l}(S;\mathbf{Z})$ の正定値な元からなる部分集合を $Sym^*_{n+l}(S;\mathbf{Z})^+$ と記す。
さらに

$$L = M_{l,n}(\mathbf{Z})$$

とおく。
$\mathcal{D}_{n,l}$ 上の正則関数 $\phi(\tau, z)$ が重さ k、次数 n の Γ_n に関する Jacobi 形式とは次の (i), (ii), (iii) を満たすときをいう。

(i) $\phi(\tau, z+\lambda\tau+\mu) = e\Big(-\mathrm{tr}({}^t\lambda S\lambda + {}^t\lambda S z)\Big)\phi(\tau, z), \qquad \lambda, \mu \in L$

(ii) $\phi(M(\tau, z)) = e(\mathrm{tr}({}^t z S z(c\tau+d)^{-1}c)\det(c\tau+d)^k\phi(\tau, z), \qquad M \in \Gamma_n.$

(iii) (Fourier 展開)

$$(\star) \qquad \phi(\tau, z) = \sum_{T \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbf{Z}),\ T \geq 0} c(T) e(\mathrm{tr}(N\tau + {}^t r z)),$$

ここで $T = \begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & S \end{pmatrix}$ は $Sym^*_{n+l}(S;\mathbf{Z})$ の半正定値対称行列をわたる。

注意） $n \geq 2$ の場合は (iii) の Fourier 展開は他の条件から導かれる。

$J_{k,S}(\Gamma_n)$ で重さ k、次数 n の Γ_n に関する Jacobi 形式の成す空間を表すとする。
Jacobi 形式に付随する Köcher-Maass Dirichlet 級数を導入するため、若干の記号を準備する。

$B_{n,l}(\mathbf{Z})$ を次で与えられる $GL_{n+l}(\mathbf{Z})$ の部分群とする：

$$B_{n,l}(\mathbf{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} U & 0 \\ y & 1_l \end{pmatrix} \middle| U \in GL_n(\mathbf{Z}),\ y \in L \right\}$$

群 $B_{n,l}(\mathbf{Z})$ は 2 次形式の集合 $Sym^*_{n+l}(S;\mathbf{Z})^+$ に、
$T \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbf{Z})^+$, $\gamma \in B_{n,l}(\mathbf{Z})$ に対し、$T \longmapsto T[\gamma] := {}^t\gamma T \gamma$ で作用する。この作用に関し、類（class）と種（genus）を定義する（[Ar1, 2, 3]）。
T, $T' \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbf{Z})^+$ がこの作用に関して同じ $B_{n,l}(\mathbf{Z})$ 軌道に属するとき同じ類に属するといい、$T \sim_{\mathbf{Z}} T'$ と記す。また、任意の素数 p について同じ $B_{n,l}(\mathbf{Z}_p)$ 軌道に属するとき同じ種に属するといい、$T \sim_{gen} T'$ と記す。一つの種は有限個の類からなる。

Köcher-Maass Dirichlet series の定義

$\phi \in J_{k,S}(\Gamma_n)$ を取り、Fourier 展開を $(\star)$ とする。

$$D_n(\phi, s) = \sum_{T \in Sym^*_{n+l}(S;\mathbf{Z})^+/\sim_{\mathbf{Z}}} \frac{c(T)}{\epsilon(T)\det(\tilde{T})^s}$$

$\epsilon(T) = \sharp\{\gamma \in B_{n,l}(\mathbf{Z}) \mid T[\gamma] = T\}$ とし、$\tilde{T} = N - \frac{1}{4}{}^t r S^{-1} r$ とおいた。和は T が $Sym^*_{n+l}(S;\mathbf{Z})^+$ の上記の意味の同値類の完全代表系をわたることを意味する。$c(T[\gamma]) = c(T)$ $(\forall\gamma \in B_{n,l}(\mathbf{Z}))$ に注意する。この Dirichlet 級数は $\mathrm{Re}(s) > k - l/2 + (n+1)/2$ で絶対収束する。
$D_n(\phi, s)$ の積分表示を求めてみよう。
各 $r \in L/(2S)L$ に対する theta 級数

$$\theta_r(\tau, z) := \sum_{\lambda \in L} e\left(\mathrm{tr}\left(S[\lambda + (2S)^{-1}r]\tau + 2{}^t(\lambda + (2S)^{-1}r)Sz\right)\right)$$

$$((\tau, z) \in \mathcal{D}_{n,l})$$

を用いると Jacobi 形式 ϕ は

$$\phi(\tau, z) = \sum_{r \in L/(2S)L} h_r(\tau)\theta_r(\tau, z)$$

として theta 級数の 1 次結合の形に表現される。ここで各 $h_r(\tau)$ は

$$h_r(\tau) = \sum_{N \in S_n^*(\mathbf{Z}),\ N - \frac{1}{4}{}^t r S^{-1} r \geq 0} c(T) e\big(\mathrm{tr}(\tilde{T}\tau)\big)$$

と表される。各 N について $T = \begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & S \end{pmatrix}$, $\tilde{T} = N - \frac{1}{4}{}^t r S^{-1} r$ とおいた。ついでに、$h_r(\tau)$ の部分級数 $h_r^*(\tau)$ を

$$h_r^*(\tau) = \sum_{N \in S_n^*(\mathbf{Z}),\ N - \frac{1}{4}{}^t r S^{-1} r > 0} c(T) e\big(\mathrm{tr}(\tilde{T}\tau)\big)$$

で定義する ($\tilde{T}$ が正定値の部分の和)。そこで

$$h(\tau) = \sum_{r \in L/(2S)L} h_r(\tau)$$

とおくと、$h(\tau)$ は Γ_n のある合同部分群に関する重さ $k - l/2$ の保型形式になる。$h(\tau)$ と $h_0(\tau)$ ($r = 0 \in L/(2S)L$ に対応) の間には次の関係がある：

$$h(-\tau^{-1}) = c \det\left(\frac{\tau}{i}\right)^{k-l/2} h_0(\tau), \qquad c = (-1)^{nk/2} \det(2S)^{n/2}$$

さらに

$$h^*(\tau) = \sum_{r \in L/(2S)L} h_r^*(\tau)$$

とおく。$\mathcal{P}_n$ を n 次正定値対称行列の成す領域とし、$dv_n(Y)$ を

$$dv_n(Y) = \det(Y)^{-(n+1)/2} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} dy_{ij} \qquad (Y = (y_{ij}) \in \mathcal{P}_n)$$

と正規化される $\mathcal{P}_n$ 上の $GL_n(\mathbf{R})$-不変測度とする。

$$\xi_n(\phi, s) := \int_{GL_n(\mathbf{Z}) \backslash \mathcal{P}_n} h^*(iY)(\det Y)^s dv_n(Y)$$

とおく。このとき積分は $\mathrm{Re}(s) > k - l/2 + (n+1)/2$ で絶対収束し、

$$\xi_n(\phi, s) = \gamma_n(s) D_n(\phi, s)$$

となる。他方、Dirichlet 級数 $\widehat{D}_n(\phi, s)$ を

$$\widehat{D}_n(\phi, s) = \sum_{N \in S_n^*(\mathbf{Z})^+/\sim} \frac{c\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}}{\varepsilon(N)(\det N)^s}$$

で定義し、

$$\widehat{\xi}_n(\phi, s) = \gamma_n(s)\widehat{D}_n(\phi, s)$$

とおく。

Theorem 2 ゼータ関数 $D_n(\phi, s)$ は s の関数として全平面に解析接続され、関数等式

$$\dot{\xi}_n(\phi, k-l/2-s) = c\widehat{\xi}_n(\phi, s), \qquad c = (-1)^{nk/2}\det(2S)^{n/2}$$

を満たす。

証明は Maass の Lecture Note [Ma] の $\mathcal{P}_n$ 上の不変微分作用素を用いる方法による。しかしながらこの方法によると Fourier 係数の階数の低い部分の情報が打ち消されてしまうので、ゼータ関数の極の留数に関する情報が得られない。そこで別のアプローチも考える。一般的にはうまくいかないので、S について次の仮定（一種の極大条件）を設ける：

($\sharp$) $x \in (2S)^{-1}M_{l,1}(\mathbf{Z})$ に対して ${}^t xSx \in \mathbf{Z}$ ならば $x \in M_{l,1}(\mathbf{Z})$ である。

この条件のもとでは色々なことが結構うまくゆく（例えば [Ar4], 4.1, 4.2 など）。

Jacobi 形式の場合の Siegel Φ operator を定義しよう。$\phi \in J_{k,S}(\Gamma_n)$, $(\tau, z) \in \mathcal{D}_{n-1,l}$ に対し、

$$\mathcal{S}(\phi)(\tau, z) := \lim_{t\to+\infty} \phi\left(\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix}, (z, 0)\right)$$

とおく。この極限は存在し、$\mathcal{S}(\phi) \in J_{k,S}(\Gamma_{n-1})$ となる。

Theorem 3 S について条件 ($\sharp$) を仮定する。k は $k > 2n+l+1$ を満たす偶数とする。$\phi \in J_{k,S}(\Gamma_n)$ について次の公式が成立。

$$\begin{aligned}\xi_n(\phi, s) &= \int_{GL_n(\mathbf{Z})\backslash\mathcal{P}_n} \left\{(\det Y)^s h^*(iY) + c(\det Y)^{k-l/2-s} h_0^*(iY)\right\} dv_n(Y) \\ &+ \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon(\nu) v(n-\nu) \left\{\frac{c\,\widehat{\xi}_\nu(\mathcal{S}^{n-\nu}\phi, n/2)}{s-k+(l+\nu)/2} - \frac{\xi_\nu(\mathcal{S}^{n-\nu}\phi, n/2)}{s-\nu/2}\right\}\end{aligned}$$

ここで

$$\varepsilon(\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \cdots \quad \nu \neq 0 \\ 1 & \cdots \quad \nu = 0 \end{cases} \qquad v(r) = \begin{cases} \pi^{1/2-r(r+1)/4} \prod_{j=2}^r \zeta(j)\Gamma(j/2) & \cdots r \geq 2 \\ 1 & \cdots r = 1 \end{cases}$$

とおいた。

証明は分解

$$J_{k,S}(\Gamma_n) = \bigoplus_{r=0}^{n} J_{k,S}^{(r)}(\Gamma_n), \tag{2.2}$$

を用いてなされる。$J_{k,S}^{(r)}(\Gamma_n)$ は、次数 r の cusp forms の空間 $J_{k,S}^{cusp}(\Gamma_r)$ に同型な $J_{k,S}(\Gamma_n)$ の部分空間であり、$J_{k,S}^{cusp}(\Gamma_r)$ から $J_{k,S}^{(r)}(\Gamma_n)$ への同型は Klingen 型 Eisenstein 級数で与えられる（[Ar4], 4.2）. 証明の詳細は [Ar6] 参照。

3　半整数保型形式

この節では $l=1$ かつ $S=1$ とする。$S=1$ は条件 ($\sharp$) を満足する。$L=M_{1,n}(\mathbf{Z})=\mathbf{Z}^n$ とおく。$\mathbf{Z}^n$ は n 次整数係数行ベクトルのなす集合である。このとき

$$L/2L = \{(a_1,\ldots,a_n) \mid a_i = 0, \text{ or } 1\}, \qquad \sharp(L/2L) = 2^n.$$

に注意する。半整数保型形式を定義するときに標準的に使われるテータ級数は

$$\theta(\tau) := \theta_0(\tau, 0) = \sum_{\lambda\in L} e(\lambda\tau{}^t\lambda).$$

である。$\Gamma_0^{(n)}(4)$ を次で定義される Γ_n の合同部分群とする:

$$\Gamma_0^{(n)}(4) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n \;\middle|\; c \equiv 0 \bmod 4 \right\}.$$

ここでは、便利な半整数保型形式の空間である Kohnen plus space を導入し、その著しい性質を調べる。$M_{k-1/2}^{+}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ を次の (i), (ii) を満たす $\mathcal{H}_n$ 上の正則関数の成す $\mathbf{C}$-ベクトル空間とする。

(i) $f(M\langle\tau\rangle) = \det(c\tau+d)^k \dfrac{\theta(\tau)}{\theta(M\langle\tau\rangle)} f(\tau)$ for any $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0^{(n)}(4)$.

(ii) f は Fourier 展開

$$f(\tau) = \sum_{N\in S_n^*(\mathbf{Z}),\, N\geq 0} a(N) e(\mathrm{tr}(N\tau))$$

をもつ。ここで Fourier 係数は、N がある $\lambda\in L$ に対して $N \equiv -\lambda{}^t\lambda \bmod 4S_n^*(\mathbf{Z})$ の形でないならば $a(N)=0$ とする。

$S^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ を cusp forms から成る $M^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ の部分空間とする。Konen plus space の著しい性質は、index が 1 の Jacobi 形式の空間と同型になることである。次の定理は $n=1$ の場合が、Kohnen, Eichler-Zagier (see [E-Z])、$n>1$ のとき Ibukiyama [Ib] による。

Theorem 4 (Kohnen, Eichler-Zagier, Ibukiyama) k を正の偶数とする。*Kohnen plus space* $M^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ は *Jacobi* 形式の空間 $J_{k,1}(\Gamma_n)$ と、線形写像 $\sigma : \phi(\tau,z) \longmapsto f(\tau) := h(4\tau) = \sum_{r\in L/2L} h_r(4\tau)$ により同型になる。ただし $h_r(\tau)$ は ϕ を *theta* 級数の線形結合の形に表したときの係数である：$\phi(\tau,z) = \sum_{r\in L/2L} h_r(\tau)\theta_r(\tau,z)$.

(2.2) により $J_{k,1}(\Gamma_n)$ は Klingen Eisenstein 級数で張られるので、$M^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ も

$$M^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n)}(4)) = \bigoplus_{r=0}^{n} M^{+(r)}_{k-1/2},$$

と分解される。$M^{+(r)}_{k-1/2}$ は次数 r の cusp forms の空間 $S^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(r)}(4))$ に同型になる。$C^{(n)}_{k-1/2}(\tau)$ を上記同型 σ による $J_{k,1}(\Gamma_n)$ の unique Eisenstein 級数 $E^{(n)}_{k,1}(\tau,z)$ の像とする。$r=0$ のときの $M^{+(0)}_{k-1/2}$ は 1 次元で $C^{(n)}_{k-1/2}(\tau)$ で張られる。$n=1$ のとき $C^{(1)}_{k-1/2}(\tau)$ は Cohen [Co] により研究され、Fourier 展開

$$C^{(1)}_{k-1/2}(\tau) = \frac{1}{\zeta(3-2k)}\sum_{d=0}^{\infty} H(k-1,d)e(d\tau)$$

をもつ。$H(k-1,d)$ は有理数で、ある L-関数の負の整数点での特殊値として表現される (定義は [Co] 参照)。

k は 4 の倍数として、S^+_{2k-1} を次の 2 条件を満たす $N \in S^*_{2k-1}(\mathbf{Z})$ の集合とする：

(i) ある $\lambda \in L$ について $N \equiv -{}^t\lambda\lambda \bmod 4S^*_{2k-1}(\mathbf{Z})$

(ii) $\det N = 4^{k-1}$

ここで [Ar4], 6.1 と同様に

$$US^+_{2k} = \{T \in Sym^*_{2k}(1;\mathbf{Z}) \mid \det(2T) = 1\}$$

とおく。$Sym^*_{2k}(1;\mathbf{Z})$ は (2.1) で与えられた半整数対称行列の集合である。US^+_{2k} では $B_{2k-1,1}(\mathbf{Z})$-同値類を考え、$\mathcal{S}^+_{2k-1}$ では通常の $GL_{2k-1}(\mathbf{Z})$-同値類を考える。このとき US^+_{2k} の $B_{2k-1,1}(\mathbf{Z})$-同値類は $\mathcal{S}^+_{2k-1}$ の $GL_{2k-1}(\mathbf{Z})$-同値類に写像

$$T = \begin{pmatrix} N & {}^t r/2 \\ r/2 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto 4\tilde{T}, \qquad (\tilde{T} = N - \frac{1}{4}{}^t r r)$$

により bijective に対応する。[Ar5] で示したように US^+_{2k} は (従って $\mathcal{S}^+_{2k-1}$ も) single genus から成る。$S_1, S_2, \ldots, S_h$ を $\mathcal{S}^+_{2k-1}$ の $GL_{2k-1}(\mathbf{Z})$-同値類の完全代表系とする。M_{2k-1} を

$$M_{2k-1} = \sum_{j=1}^{h} \frac{1}{\varepsilon(S_j)}$$

で定義される $\mathcal{S}^+_{2k-1}$ の mass とする。M_{2k-1} の値は [Ar5] で計算されている。各 $S \in \mathcal{S}^+_{2k-1}$ に対し、theta 級数 $\theta_S(\tau)$ を

$$\theta_S(\tau) = \sum_{G \in M_{2k-1,n}(\mathbf{Z})} e(\mathrm{tr}({}^t GSG\tau))$$

で定義すると、$M^+_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n)}(4))$ に属する保型形式となる。

Theorem 5 $k > 2n+2$ でかつ k は 4 の倍数とする。

(i) *Cohen Eisenstein* 級数 $C^{(n)}_{k-1/2}(\tau)$ の *Siegel* 公式が成立：

$$C^{(n)}_{k-1/2}(\tau) = \frac{1}{M_{2k-1}} \left(\sum_{j=1}^{h} \frac{\theta_{S_j}(\tau)}{\varepsilon(S_j)} \right).$$

(ii) $C^{(n)}_{k-1/2}(\tau)$ の *Fourier* 展開は次式で与えられる：

$$C^{(n)}_{k-1/2}(\tau) = \sum_{N \geq 0} \tilde{\alpha}(S,N) e(\mathrm{tr}(N\tau))$$

ここで S は $\mathcal{S}^+_{2k-1}$ の任意の元でよい。$\tilde{\alpha}(S,N)$ は、N が正定値 のとき

$$\tilde{\alpha}(S,N) = \prod_{p \leq \infty} \tilde{\alpha}_p(S,N).$$

であり、$p > 2$ ($p = \infty$ を含む) のとき $\tilde{\alpha}_p(S,N)$ は通常の ***local density*** $\alpha_p(S,N)$ に一致し、$p = 2$ のときは $\tilde{\alpha}_2(S,N)$ は [Ar3, 4] で定義された ***local density*** $\alpha_2(Q;T)$ になる。ただし $Q \in US^+_{2k}$ は $4\tilde{Q} = S$、$T \in Sym_{n+1}(1;\mathbf{Z})^+$ は $4\tilde{T} = N$ にとる。

証明の鍵は、Jacobi 形式の Eisenstein 級数である $E_{k,1}^{(n)}(\tau, z)$ の Siegel 公式による。

最後に $M_{k-1/2}^{+}(\Gamma_0^n(4))$ に属する半整数保型形式 $f(\tau)$ に付随する Köcher-Maass Dirichlet 級数を定義しよう。$f(\tau)$ の Fourier 展開を

$$f(\tau) = \sum_{T \in S_n^*(\mathbf{Z}),\, T \geq 0} a(T) e(\mathrm{tr}(T\tau)) \qquad (\tau \in \mathcal{H}_n),$$

とし、Siegel 保型形式の場合と同様に

$$D_n(f, s) := \sum_{T \in S_n^*(\mathbf{Z})^+/\sim} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)(\det T)^s}$$

と置く。この Dirichlet 級数は $\mathrm{Re}(s) > k + n/2$ で絶対収束する。そこで f に対応する Jacobi 形式を $\phi \in J_{k,1}(\Gamma_n)$ とする（すなわち $\sigma(\phi) = f$）。

Theorem 6 記号は上記と同じとする。このとき

$$D_n(\phi, s) = 4^{-ns} D_n(f, s).$$

この等式により $D_n(f, s)$ は全 s 平面の有理型関数に解析接続され、次なる関数等式

$$4^{-ns} \gamma_n(s) D_n(f, s) = \gamma_n(k - 1/2 - s) D_n(\widehat{f}, k - 1/2 - s),$$

を満たす。ここに $\widehat{f}(\tau) = \det\left(\frac{\tau}{i}\right)^{-k+1/2} f\left((-4\tau)^{-1}\right)$ とおいた。
また $\xi_n(f, s) = \gamma_n(s) D_n(f, s)$ の *Theorem 3* と同様な *explicit formula* も成り立つ。

注意） この定理は任意の半整数保型形式 $f \in M_{k-1/2}(\Gamma_0^{(n)}(N))$（ただし N は 4 の倍数）について成り立つと考えられる（statement に多少の修正が必要）。その場合、explicit formula の証明の方針は [Ar2] による。

参考文献

[Ar1] Arakawa, T.: Dirichlet series corresponding to Siegel's modular forms, Math. Ann. **238**(1978), 157-173.

[Ar2] Arakawa, T.: Dirichlet series corresponding to Siegel's modular forms of degree n with level N, Tohoku Math. J. **42**(1990), 261-286.

[Ar3] Arakawa, T.: Siegel's formula for Jacobi forms, International Journ. of. Math. **4** (1993), 689-719.

[Ar4] Arakawa, T.: Jacobi Eisenstein series and a basis problem for Jacobi forms, Comment. Math. Univ. St. Pauli **43** (1994), 181-216.

[Ar5] Arakawa, T.: Minkowski-Siegel's formula for certain orthogonal groups of odd degree and unimodular lattices, Comment. Math. Univ. St. Pauli **45** (1996), 213-227.

[Ar6] Arakawa, T.: Köcher-Maass Dirichlet series corresponfing to Jacobi forms and Cohen Eisenstein series, in preparation.

[Co] Cohen, H.: Sums invoving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, Math. Ann. **217** (1975), 271-285.

[E-Z] Eichler, M. and Zagier, D.: The Theory of Jacobi forms, Birkhäuser, 1985.

[Ib] Ibukiyama, T.: On Jacobi forms and Siegel modular forms of half intrgral weights, Comment. Math. Univ. St. Pauli. **41** (1992), 109-124.

[I-K] Ibukiyama, T. and Katsurada, H.: An explicit form of Koecher Maass Dirichlet series associated with Siegel Eisenstein series, 数理研講究録 **965**(1996), 41-51.

[I-S] Ibukiyama, T. and Saito, H.: On zeta functions associated to symmetric matrices I, Amer. J. Math. **117** (1995), 1097-1155.

[Ko] Köcher, M.: Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung, J. reine Angew. Math. **192** (1953), 1-23.

[Koh] Kohnen, W.: Modular forms of half integral weight on $\Gamma_0(4)$, Math. Ann. **248** (1980), 249-266.

[Ma] Maass, H.: Siegel's modular forms and Dirichlet series, Lecture Notes in Math. **216**, Springer 1971.